



TITLE:

2円柱を横切る流れの不安定性と遷移 (流れの遷移と乱流のスケルトン)

AUTHOR(S):

水島, 二郎; 末広, 典久

---

CITATION:

水島, 二郎 ...[et al]. 2円柱を横切る流れの不安定性と遷移 (流れの遷移と乱流のスケルトン). 数理解析研究所講究録 2005, 1454: 1-20

ISSUE DATE:

2005-11

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/47793>

RIGHT:

## 2 円柱を横切る流れの不安定性と遷移

同志社大学工学部 水島 二郎 (Jiro Mizushima)

同志社大学工学部 末広 典久 (Norihisa Suehiro)

### 1. はじめに

2 円柱を過ぎる流れは工学や土木などのさまざまな分野で調べられてきた。2 円柱の配置はタンデム型と並列型および斜め型の 3 つに分類できる。タンデム型 2 円柱を過ぎる流れの研究は双翼型飛行機の翼を支える柱への応用から始まっているため、研究者の主な関心は円柱の抗力係数や揚力係数に向けられてきた。現在では、流れと円柱の振動を抑制することを目的として、海洋工学や土木工学にも応用されている。たとえば、熱交換器中では高温の流体が流れている管の中に温度計が設置されている。温度計は流れの中に振動を引き起こし、流れから繰り返し振動する力を受けることで、共鳴振動を生じて破断に至る。こうした破断を防ぐためにダミーの円柱を温度計のすぐ前に設置することで、共鳴振動を抑制するという工夫が考えられている。温度計の振動を最も効果的に抑制するためのダミーの円柱と温度計との間の最適な距離が存在し得る。

3 つの典型的な配置の中で、並列型 2 円柱を過ぎる流れは後流の相互作用を考えるための単純なモデルである。後流の相互作用の結果として同位相と逆位相の 2 つの振動流のモードが観察されている。実際、Peschard and Le Gal[1] は、2 つの振動流のモードを表す連立ランダウ方程式を提案し、実験で観測される振動流の 2 つのモードと定性的に良く似た結果を再現するモデル方程式を示した。一方、タンデム型 2 円柱を過ぎる流れは並列型配置の 2 円柱後流より複雑な現象を示す。なぜなら、下流側の円柱は上流側円柱の後流の中に入り込み、上流側円柱によって引き起こされるせん断層や渦などを伴う複雑な流れが出現するからである。この複雑性は、タンデム型 2 円柱についての研究論文は並列型のものよりかなり少ないという事実にも反映されている。タンデム型 2 円柱を過ぎる流れの最初のころの研究は主に実験であり、その概要は Zdravkovich[2] と Ohya, Okajima and Hayashi[3] の 2 つのレビューにまとめられている。

これまでの研究では多くの実験が約  $10^3 - 10^5$  の高いレイノルズ数で行われおり [4, 5, 6, 7]、数値シミュレーションは低いレイノルズ数でなされてきた [8, 9, 10, 11]。タンデム型 2 円柱を過ぎる流れの実験と数値計算の結果で共通しているのは、円柱間距離を連続的に変えても、ある臨界距離を越えると流れのパターンが不連続的に変わることである。2 円柱間隔が臨界値よりも小さなきときには、下流側の円柱は上流側の円柱の後流の中に入っており、2 円柱の間にはほとんど流れがなく、2 円柱は一つの大きな物体のようにみなされる。このことは、下流側の円柱の存在が上流側の円柱からの渦の放出を抑制していることをも示している。しかし、臨界値よりも大きな間隔では 2 円柱それぞれの後流がお互いにほとんど独立してい

るように振舞っている。その結果、流れを特徴づける抗力係数と揚力係数およびストローハル数などの物理量は間隔比が連続的に増加あるいは減少しても、臨界値で不連続な変化を示すのである。

この急激な変化の原因を解明するために多くの実験と数値計算がなされてきた。臨界間隔の存在は Ishigai *et al.*[4] により、レイノルズ数が 1500 – 15000 の実験によって確認されている。彼らは臨界間隔を、ストローハル数と表面圧力係数が急激な変化を示す  $3.8d$  付近であるとした。高いレイノルズ数で行われたほとんどの実験において臨界間隔は  $[3.5d - 4.0d]$  の範囲にあることが示されている [5, 6, 7]。低いレイノルズ数における、流れの物理量の不連続な変化についてはまだあまり多くの結果は示されていない。Tanida, Okajima and Watanabe[12] の実験結果では、 $Re = 80$  での抗力係数が間隔比の関数として、間隔比  $3.9d$  付近でつながる 2 つの異なる線分で描かれている。ただし、彼らは実験結果から判断して、臨界間隔比は約  $5d$  であると述べている、 $Re = 100$  で、 $3d$  から  $5d$  の間の間隔で流れパターンに明確な違いがあることが Ohmi and Imaichi[13] によって確認されている。臨界間隔の存在は 100 から 200 程度の低いレイノルズ数での数値計算でもわかっている [8, 9, 10, 11]。これら  $[3.75d - 4.0d]$  の間の中でも Sharman *et al.*[11] による最も最近の結果では臨界間隔が存在することが示されている。

Biermann and Herrnstein[14] は、下流側円柱の抗力は上流側円柱の存在により減少するが、上流側円柱の抗力は下流側円柱にはあまり影響されないことを示した。下流側円柱の抗力が減少する大きさは間隔が  $4d$  より大きければ間隔には依存せず、 $4d$  より小さければ下流側円柱の抗力は間隔の減少に伴い急激に減少し、さらに  $3d$  より小さければ下流側円柱は前方への力を受け、両円柱への正味の全抗力は 1 円柱よりも少なくなることを示した。

タンデム型 2 円柱を過ぎる流れは、多くの物理的に興味深い現象を含むさまざまな流れパターンを示している。本研究においては、この流れの安定性と遷移について調べ、特に、抗力係数と揚力係数およびストローハル数について不連続な変化が起こる原因について詳しく調べる。

## 2. 基礎方程式

### 2.1 基礎方程式および境界条件

一様流中に置かれたタンデム型 2 円柱を過ぎる流れを考える (図 1)。円柱の直径を  $d$ 、2 円柱の間隔を  $\ell$  として、間隔比  $\Gamma$  を  $\Gamma \equiv \ell/d$  と定義する。非圧縮 2 次元流れ場を仮定し、流れ関数  $\psi(x, y, t)$  と渦度  $\omega(x, y, t)$  を用いて、渦度輸送方程式とポアソン方程式を無次元化した形で表すと

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \mathcal{N}(\psi, \omega) + \frac{1}{Re} \mathcal{M}\omega, \quad (1)$$

$$\omega = -\mathcal{M}\psi, \quad (2)$$

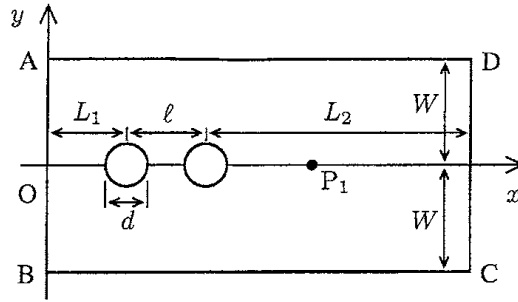


図 1: 2 円柱の配置と座標系.

$$\mathcal{M} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad \mathcal{N}(f, g) = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial g}{\partial x} \quad (3)$$

となる. ここで, 全ての変数は上流における一様流の流速  $U$  を代表速度, 円柱の直径  $d$  を代表長さとして無次元化している. 時間は  $d/U$  によって無次元化されている. レイノルズ数は  $Re \equiv Ud/\nu$  で定義する. ただし,  $\nu$  は動粘性係数である.

無限に広い流れ場を図 1 の ABCD で示される有限の領域で近似する. 一様流が上部境界 (AB) から流入すると仮定し, 流入条件を次のように表す.

$$\psi = y, \quad \omega = 0 \quad \text{on} \quad AB. \quad (4)$$

側面 (AD と BC) でも一様流を仮定し, 次のようにおく.

$$\begin{aligned} \psi &= \psi_1, \quad \omega = 0 \quad \text{on} \quad AD, \\ \psi &= \psi_2, \quad \omega = 0 \quad \text{on} \quad BC. \end{aligned} \quad (5)$$

ただし,  $\psi_1$  と  $\psi_2$  は定数である. 流出口 (CD) での流出条件はゾンマーフェルト放射条件

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + c \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \omega}{\partial t} + c \frac{\partial \omega}{\partial x} = 0 \quad \text{on} \quad CD \quad (6)$$

を用いる. ただし, 位相速度  $c$  の与え方については後で説明する. 円柱表面では滑りなし条件が適用される. これは,

$$\psi = \psi_s, \quad \omega = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial n^2} \quad (7)$$

のように表される.  $n$  は円柱表面に垂直方向の座標である. これらの条件では,  $\psi_s$  が与えられない限り, (1) と (2) の解を一意に定義するには不十分である. 円柱表面上での流れ関数の値  $\psi_s$  を見積もるために, 流れ場全体で圧力を 1 価関数として条件を課す. これは,

$$\oint_C \nabla p \cdot t ds = 0 \quad (8)$$

と表される。ただし、 $s$  と  $t$  はそれぞれの円柱を任意に囲む  $C$  に沿った、接線方向の座標と単位ベクトルを表す。ここでは、円柱表面の圧力勾配  $\nabla p$  は表面に滑りなし条件を適用することで次のように単純に表せるため、円柱表面に沿った  $C$  を用いる。

$$\nabla p = -\frac{1}{Re} \nabla \times \omega. \quad (9)$$

## 2.2 定常解

低いレイノルズ数においては、流れは2円柱の中心を通る  $x$  軸に対して対称で定常である。対称定常流に対応する解はレイノルズ数の大きさに関わらず境界条件 (4) – (7) のもとで基礎方程式 (1) と (2) を満たすが、この流れは臨界値を越えると不安定となる。この対称定常流、つまり、 $(\bar{\psi}, \bar{\omega})$  が線形安定性解析の主流である。定常解は、次の定常渦度輸送方程式およびポアソン方程式を満たす。

$$\mathcal{N}(\bar{\psi}, \bar{\omega}) + \frac{1}{Re} \mathcal{M} \bar{\omega} = 0, \quad (10)$$

$$\bar{\omega} = -\mathcal{M} \bar{\psi}. \quad (11)$$

方程式 (10) と (11) を適切な境界条件のもとに解くことで定常解は数値的に得られる。対称定常解  $(\bar{\psi}, \bar{\omega})$  の境界条件は式 (6) の時間微分項がないことと円柱表面での  $\psi_s$  が 0 であることを除いて、式 (4) – (7) と同様である。

## 2.3 定常解の線形安定性解析

定常解の安定性を解析するために、定常解  $(\bar{\psi}, \bar{\omega})$  に攪乱  $(\psi', \omega')$  を付け加えて、渦度および流れ関数を  $\omega = \bar{\omega} + \omega'$ ,  $\psi = \bar{\psi} + \psi'$  と表す。これらを式 (1) に代入し、式 (10) を引くことで、 $\omega'$  の攪乱方程式

$$\frac{\partial \omega'}{\partial t} = \mathcal{N}(\psi', \bar{\omega}) + \mathcal{N}(\bar{\psi}, \omega') + \mathcal{N}(\psi', \omega') + \frac{1}{Re} \mathcal{M} \omega' \quad (12)$$

が得られる。式 (12) において、攪乱の非線形項  $(\psi', \omega')$  を無視し、攪乱の時間依存性を指数関数と仮定して、 $\psi' = \hat{\psi}(x, y) \exp(\lambda t)$ ,  $\omega' = \hat{\omega}(x, y) \exp(\lambda t)$  と表すと、線形化した攪乱方程式を得る。

$$\lambda \hat{\omega} = \mathcal{N}(\hat{\psi}, \bar{\omega}) + \mathcal{N}(\bar{\psi}, \hat{\omega}) + \frac{1}{Re} \mathcal{M} \hat{\omega}. \quad (13)$$

この式を、攪乱のポアソン方程式

$$\hat{\omega} = -\mathcal{M} \hat{\psi} \quad (14)$$

と連立して解く。ここで、係数  $\lambda$  は攪乱の複素線形増幅率である。その実部  $\lambda_r$  と虚部  $\lambda_i$  は攪乱の増幅率と角速度 (振動数) を表している。

攪乱  $(\hat{\psi}, \hat{\omega})$  の上流および側面の境界条件は,

$$\hat{\psi} = 0, \quad \hat{\omega} = 0 \quad \text{on} \quad (\text{AB}, \text{AD}, \text{BC}) \quad (15)$$

で与えられる. 下流の流出条件は

$$\lambda \hat{\psi} + c \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial x} = 0, \quad \lambda \hat{\omega} + c \frac{\partial \hat{\omega}}{\partial x} = 0 \quad \text{on} \quad \text{CD} \quad (16)$$

と表される. 円柱表面では滑りなし条件が適用される.

$$\hat{\psi} = 0, \quad \hat{\omega} = \frac{\partial^2 \hat{\psi}}{\partial n^2}. \quad (17)$$

ここで, 式 (13) と式 (14) は境界条件 (15)–(17) のもとで, 固有値問題として解く. このとき固有値  $\lambda$  は無限個あるが, これを固有値  $\lambda_k$  と表し, その固有関数を  $(\hat{\psi}_k, \hat{\omega}_k)$ ,  $(k = 1, 2, \dots)$  と表して, それぞれをモードと呼ぶ. 固有値  $\lambda_k$  の実部の大きい順に  $\lambda_{1r} \geq \lambda_{2r} \geq \dots$  と順序をつけて, 最大増幅モード  $\lambda_1$  と  $(\hat{\psi}_1, \hat{\omega}_1)$  に着目し, これらを単に  $\lambda$ ,  $(\hat{\psi}, \hat{\omega})$  とおく. このとき対称定常流は  $\lambda_r > 0$  ならば不安定,  $\lambda_r < 0$  ならば安定である.  $\lambda_r = 0$  のときのレイノルズ数が主流の臨界レイノルズ数  $Re_c$  である.

## 2.4 非線形周期解

レイノルズ数が臨界値より大きくなると, 線形不安定性により, 攪乱は増幅するが充分時間が経過した後では, 非線形効果により, 平衡振幅をもつ振動流となる. 数値的に平衡状態の振動流を求めるために, 攪乱  $(\psi', \omega')$  をフーリエ級数展開する.

$$\psi' = \sum_{m=-M}^M \tilde{\psi}_m \exp(im\Omega t), \quad \omega' = \sum_{m=-M}^M \tilde{\omega}_m \exp(im\Omega t). \quad (18)$$

ここで,  $\Omega$  は平衡状態での攪乱の振動数であり, 打ち切り波数  $M$  は充分大きくとる. 攪乱  $(\psi', \omega')$  の実数条件より  $\tilde{\psi}_{-m} = \tilde{\psi}_m^*$ ,  $\tilde{\omega}_{-m} = \tilde{\omega}_m^*$  という関係が得られる. 式 (18) を式 (12) に代入して, 同じフーリエ成分  $\exp(im\Omega t)$  の係数を等しいとすると,  $(\tilde{\psi}_m, \tilde{\omega}_m)$  の式

$$im\Omega \tilde{\omega}_m = \mathcal{N}(\tilde{\psi}_m, \bar{\omega}) + \mathcal{N}(\bar{\psi}, \tilde{\omega}_m) + \sum_{p+q=m} \mathcal{N}(\tilde{\psi}_p, \tilde{\omega}_q) + \frac{1}{Re} \mathcal{M} \tilde{\omega}_m \quad (19)$$

を得る. ポアソン方程式 (11) より

$$\tilde{\omega}_m = -\mathcal{M} \tilde{\psi}_m \quad (20)$$

が導かれる.

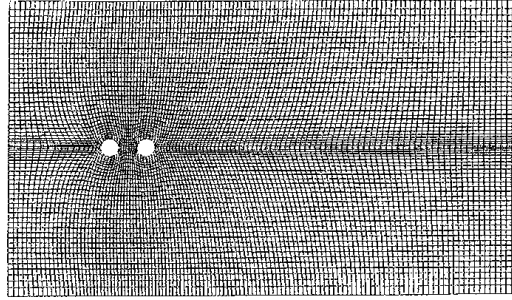


図 2: 計算格子の例.  $\Gamma = 2$ .

### 3. 数値計算法

#### 3.1 格子形成

発展方程式の数値シミュレーションや定常方程式および線型安定性解析の計算など全ての数値計算において、時間微分や空間微分を有限差分で近似する。格子形成のために、次のポアソン方程式による格子形成法を用いる [17].

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} = P(\xi, \eta), \quad \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} = Q(\xi, \eta). \quad (21)$$

ここで、 $(\xi, \eta)$  は変換後の座標であり、上式の右辺の関数  $P(\xi, \eta)$  と  $Q(\xi, \eta)$  は円柱の表面付近で格子点が集中するように定める。ここで、 $P(\xi, \eta)$ ,  $Q(\xi, \eta)$  の形は Steger and Sorenson によって提案された方法で定義する [18]. 座標  $\xi$  は円柱表面に沿うようにとり、 $\eta$  を  $\xi$  に直交するようにとる。また、 $\eta = 0$  は円柱表面である。計算格子の例として、 $\Gamma = 2$  における計算格子を図 2 に示す。この図では格子点は全部で  $371 \times 260$  点であり、最小格子幅は円柱表面付近で 0.02, 最大格子幅は流出および上下境界で 0.2 である。

#### 3.2 時間発展法

数値シミュレーションにおいて、基礎方程式 (1) と (2) を境界条件 (4) – (8) と適切な初期条件のもとに時間発展法を用いて解く。空間微分には 2 次精度の中心差分を、時間微分には 4 次精度の Runge-Kutta 法を用いた。ポアソン方程式 (2) の解法には SOR (Successive Over Relaxation) 法を用いた。緩和係数  $\epsilon$  については、レイノルズ数や間隔比によって適切に決めるが、多くの場合  $\epsilon = 1.5$  とした。ポアソン方程式の収束条件としては、 $(\psi, \omega)$  について、次のステップとの相対誤差が計算領域の全格子点で  $10^{-6}$  以下になったとき十分収束したとみなした。隣接した 2 つの時間ステップ間の  $\psi$  および  $\omega$  の相対誤差の合計がそれぞれ  $10^{-10}$  より小さくなったとき、流れが定常状態であると判断した。

### 3.3 SOR 法

定常解 (主流) を得るためと, 線形安定性解析の固有値問題を解くのためには SOR 法を用いた. 式 (10) と (11) を境界条件 (4) – (7) のもとで数値的に解く. 空間微分を 2 次精度の差分で近似し, SOR 法の緩和係数  $\epsilon$  は  $\Gamma$  と  $Re$  の値によって,  $0.3 < \epsilon < 0.6$  の範囲で定める. 計算時間を節約するために  $(\bar{\psi}, \bar{\omega})$  が  $x$  軸に対して反対称であるという条件を用いる. すなわち,  $\bar{\psi}(x, -y) = -\bar{\psi}(x, y)$  および  $\bar{\omega}(x, -y) = -\bar{\omega}(x, y)$  として定常解の計算を行った.

式 (13) と (14) および境界条件 (15) – (17) からなる攪乱の固有値問題を定常解の数値計算と同様の手順で数値的に解く. ここで,  $\lambda$  も反復によって求める従属変数であるとみなす. 解の収束については, 定常解の判定法と同様の方法で判定した. 最大増幅モードの固有関数は対称性  $\hat{\psi}(x, -y) = \hat{\psi}(x, y)$  および  $\hat{\omega}(x, -y) = \hat{\omega}(x, y)$  があるので, この対称性を数値計算に用いた.

非線形周期解は適切な初期条件があれば SOR 法を用いて計算できる. 非線形周期解の数値計算において, 振動数  $\Omega$  を非線形周期解を得るための従属変数とする. なぜなら,  $\Omega$  は非線形効果により線形安定性解析で見積もられた  $\omega_i$  とは異なるためである. 計算時間と容量を節約するために, 偶数次のフーリエモードには反対称条件を, 奇数次のフーリエモードには対称条件を課す. すなわち,  $\tilde{\psi}_m(x, -y) = (-1)^{m+1}\tilde{\psi}_m(x, y)$  および  $\tilde{\omega}_m(x, -y) = (-1)^{m+1}\tilde{\omega}_m(x, y)$  とした.

## 4. 計算結果

### 4.1 計算方法の精度見積もりと有用性

計算結果を紹介する前に, 今回用いた計算方法の精度について見積りを行う. 全ての数値計算において, 計算領域を  $L_1 = 5d$ ,  $L_2 = 20d$  および  $W = 8d$  とした. 計算領域の大きさを検定するために,  $L_1$ ,  $L_2$  および  $W$  を順に変えて計算を行い, ストローハル数  $St$  および上流側円柱と下流側円柱の抗力係数  $C_{D1}$ ,  $C_{D2}$  と揚力係数  $C_{L1}$ ,  $C_{L2}$  の数値誤差を見積った. このようにして得られた  $\Gamma = 3$ ,  $Re = 100$  における数値シミュレーションの計算結果を表 1 に示す.  $L_1 = 5d$  と  $7.5d$  を用いて計算したストローハル数  $St$  の相違は 0.7% 以内であった.  $C_{D2}$  の絶対値は非常に小さいので,  $C_{D2}$  の誤差は 4.5% 程度となった. 計算領域を  $L_1 = 5d$ ,  $L_2 = 20d$  および  $W = 8d$  としたとき, 計算結果に含まれる数値誤差は 4.5% 以内であると判断し, この計算領域で全ての数値計算を行う.

格子点数を決めるために  $\Gamma = 3.0$ ,  $Re = 100$  で 4 つの異なる格子点数を選んで, 数値シミュレーションを行った. この結果を表 2 に示す. この表より数値誤差は 1.8% 以内であることがわかる. よって, 数値シミュレーションを含む数値計算では  $380 \times 200$  の格子点を用いる.



表 1: 計算領域の大きさの検証.

	$St$	$C_{D1}$	$C_{D2}$	$C_{L1}$	$C_{L2}$
(a) 上流長さ $L_1$					
$(L_2 = 20d, W = 8d)$					
$L_1 = 5d$	0.1219	1.181	-0.0421	0.1951	0.0643
$L_1 = 7.5d$	0.1228	1.177	-0.0441	0.1905	0.0633
(b) 下流長さ $L_2$					
$(L_1 = 5d, W = 8d)$					
$L_2 = 20d$	0.1219	1.181	-0.0421	0.1951	0.0643
$L_2 = 25d$	0.1226	1.179	-0.0433	0.1889	0.0639
(c) 流域幅 $W$					
$(L_1 = 5d, L_2 = 20d)$					
$W = 8d$	0.1219	1.181	-0.0421	0.1951	0.0643
$W = 10d$	0.1226	1.178	-0.0431	0.1885	0.0638

計算結果の誤差を見積もり、計算方法の正しさを確認するために、一様流中に置いた1円柱を過ぎる流れの臨界レイノルズ数を求めた。1円柱を過ぎる流れは、本研究では $\Gamma = 0$ の場合に相当する。この流れは安定性も含め理論的および実験的に詳細に調べられてきた最も単純な流れである。低いレイノルズ数において、1円柱を過ぎる流れはどのような初期条件であっても十分時間が経過すると定常状態となる。定常状態では流れ場は円柱の中心を通る流線に対して対称である。数値シミュレーションによって得られた分岐図を解析した結果、臨界レイノルズ数は $Re_c = 46.731$ であった。また、定常流の線形安定性解析から得られた臨界値は $Re_c = 46.088$ であった。数値シミュレーションと線形安定性解析における $Re_c$ の違いは約1.4%であり、どちらの方法を用いても正しい結果が得られている。

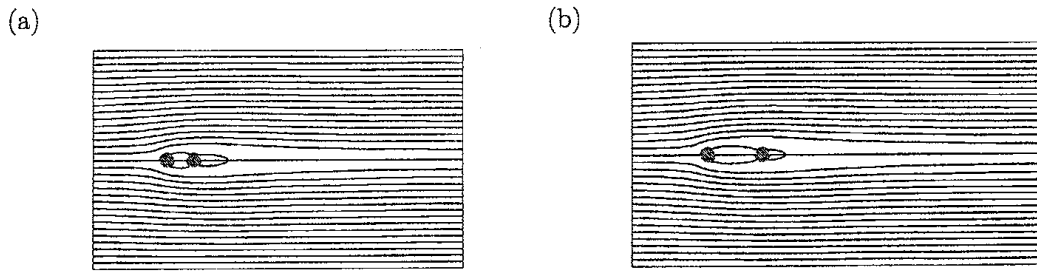
Mathis, Provansal and Boyer[19]が実験によって見積もった臨界レイノルズ数は $Re_c = 47.0$ であり、Jackson [20]が線形安定性解析によって見積もった理論値は $Re_c = 46.184$ であった。これらの値と今回計算で得られた値の違いは2%以内である。

## 4.2 流れパターン

抗力・揚力・ストローハル数などの物理量の不連続な変化は間隔比 $\Gamma = 3.5 - 3.9$ で起こっていると報告されているので、本研究では、 $\Gamma = [1, 6]$ の範囲で、さまざまな値の $\Gamma$ について計算を行った。ここでは、典型的なケースとして $\Gamma = 2$ と4の2つの間隔比について、その不安定性と遷移について説明する。間隔比 $\Gamma$ の値にかかわらず、低いレイノルズ数においては、円柱の中心を通り $x$ 軸に対して対

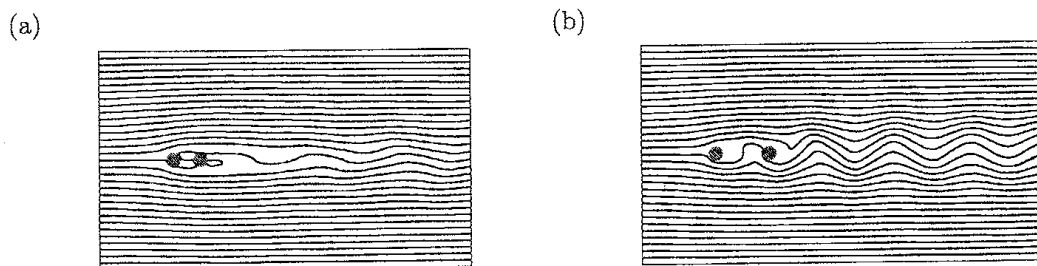
表 2: 計算格子数の検証.

Grid number	$St$	$C_{D1}$	$C_{D2}$	$C_{L1}$	$C_{L2}$
$380 \times 200$	0.1219	1.1810	-0.0421	0.1959	0.0640
$760 \times 200$	0.1224	1.1842	-0.0415	0.1986	0.0632
$380 \times 400$	0.1224	1.1831	-0.0419	0.1966	0.0635
$760 \times 400$	0.1227	1.1865	-0.0411	0.1994	0.0631

図 3: 流れ場 (流線). 定常対称流.  $Re = 60$ . (a)  $\Gamma = 2$ . (b)  $\Gamma = 4$ .

称で定常な流れとなる. このような対称定常流は定常方程式 (10) と (11) を解くことで得られ, その線形安定性を数値的に調べる.  $Re = 60$  における  $\Gamma = 2$  と 4 の流れパターンをそれぞれ図 3(a) と 3(b) に示す. 下流側円柱直後の双子渦の長さは  $\Gamma = 4$  の方が  $\Gamma = 2$  より短いことを除けば, どちらの流れパターンもほとんど同様である. また, 上流側円柱からはがれた流れが下流側円柱に再付着し閉じた流線が両方の場合に見られる. これらは, 2 円柱間の閉じた流線を外側輪郭とする表面をもつ一つの物体を過ぎる流れであるかのように見える.  $\Gamma = 4$  は非線形性を考慮に入れると不安定となるが, どちらの流れも線形安定性解析によって安定であることが示されている.

$\Gamma = 2$  と 4 のどちらの場合においても, 流れは  $Re = 100$  で対称性を失ない, 振

図 4: 流れ場 (流線). 振動流.  $Re = 100$ . (a)  $\Gamma = 2$ . (b)  $\Gamma = 4$ .

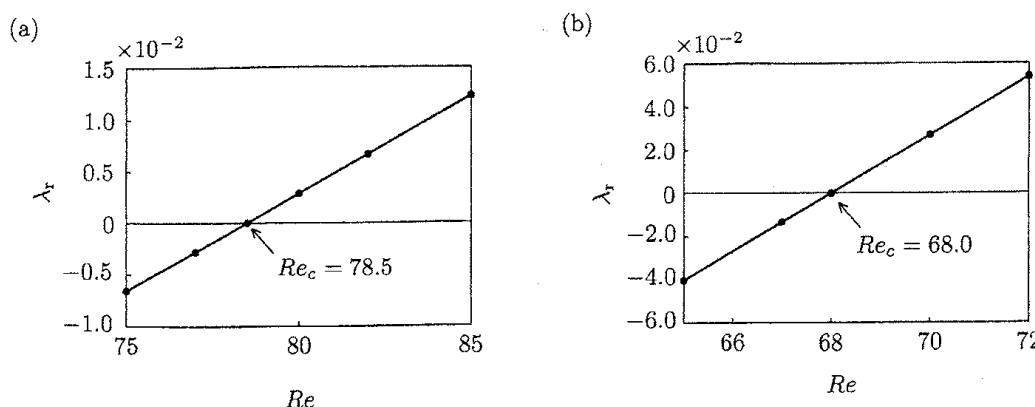


図 5: 線形増幅率  $\lambda_r$ . (a)  $\Gamma = 2$ . (b)  $\Gamma = 4$ .

動し始め, 十分時間が経過したあとで平衡状態になることが数値計算によって明らかになった.  $\Gamma = 2$  と 4 の瞬間の流れパターンを図 4(a) と 4(b) に示す. どちらの場合も 2 円柱後流で振動流が見られ, その振幅については  $\Gamma = 4$  の方が  $\Gamma = 2$  の振幅よりも大きい.  $\Gamma = 2$  のとき, 2 円柱の間の領域では振動していないことがわかる (図 4(a)). 上流側円柱からはがれた流線が下流側円柱で再付着し, 2 円柱を囲う閉じた流線が存在している. それゆえに,  $Re = 100$  で流れは閉じた流線の形をもつ 1 つの物体を過ぎる流れであるかのようにみなされる. 一方, 図 4 (b) で示される  $\Gamma = 4$  については 2 円柱の間では流れが振動流となっていることが観察できる. この  $\Gamma = 2$  と  $\Gamma = 4$  の流れパターンの違いが臨界間隔付近での急激な物理量の変化を示すことを表している.

### 4.3 定常流の線形安定性解析

数値シミュレーションを行った結果,  $\Gamma = 2$  と 4 のどちらの場合についても, 流れは  $Re = 60$  で対称定常流,  $Re = 100$  で振動流が現れることを確認した. これより, 対称定常流はその安定性を臨界レイノルズ数で失っていることになる. この流れの線形安定性を調べるために, 数値的に方程式 (10) と (11) を解くことで, 対称定常解  $(\bar{\psi}, \bar{\omega})$  を計算し, 方程式 (13) と (14) からなる固有値問題を境界条件 (15) - (17) のもとで解く.

固有値の実部である線形増幅率  $\lambda_r$  を図 5(a) と 5(b) に図示する. 計算により線形増幅率  $\lambda$  を求めた. 図 5(a) は  $\Gamma = 2$ , 図 5(b) は  $\Gamma = 4$  のときの結果で, これらの図より臨界レイノルズ数  $Re_c$  は,  $\Gamma = 2$  で  $Re_c = 78.5$ ,  $\Gamma = 4$  では  $Re_c = 68.0$  が得られた. これらの臨界レイノルズ数より判断すると, 流れは無限小攪乱では  $\Gamma = 2$  の方が  $\Gamma = 4$  よりも安定であることがわかる. これより, 1 円柱を過ぎる流れの臨界レイノルズ数は  $Re_c \sim 46 - 47$  であることを考慮すると, ある物体の近くにもう一つ別の物体が置かれているとき, 流れは安定化するといえる.

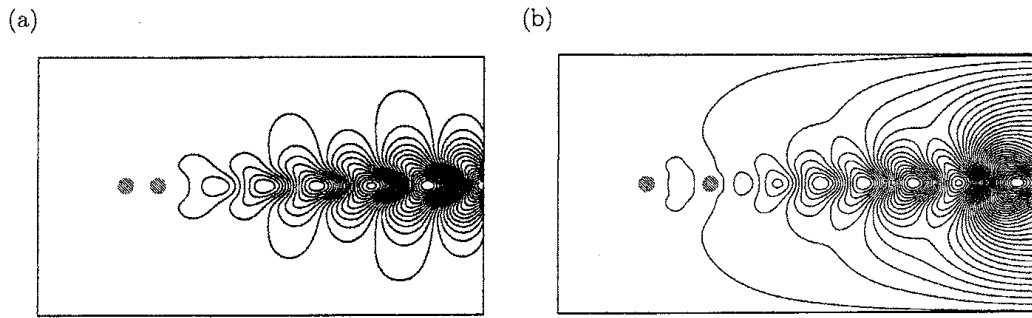


図 6: 流れ場 (流線). 最も不安定な攪乱の実部  $\hat{\psi}_r$ . (a)  $\Gamma = 2$ ,  $Re = 78.2$ . (b)  $\Gamma = 4$ ,  $Re = 68.0$ .

虚部  $\lambda_i$  は攪乱の角速度であり, 流れにおける振動の無次元振動数であるストローハル数  $St$  は  $St = \lambda_i / (2\pi)$  のように計算できる.  $St$  の値は図 5(a) と 5(b) のレイノルズ数の範囲ではほぼ一定で,  $\Gamma = 2$  で 0.122,  $\Gamma = 4$  では 0.160 であり, この値は  $Re$  にほとんど依存しない.

攪乱の流れパターン, つまり, 固有関数  $\hat{\psi}_r$  の実部は,  $\Gamma = 2$  と 4 のそれぞれの臨界値で図 6(a) と 6(b) のようになる. ここで, 固有関数  $\hat{\psi}$  は下流側円柱から約  $6.3d$  後方, 中心線 ( $y = 0$ ) 上の代表点  $P_1$  において  $\hat{\psi} = 1$  として正規化している. ただし, 採用した点と下流側円柱の距離は正確に  $6.3d$  ではない. なぜなら, 本研究で用いた計算格子は代表点の位置での正確な格子点をもっておらず, 代表点に最も近い点を採用しているからである. 2つの流れパターンの図は図 6(b) で 2 円柱の間に見られる閉じた流線を除き大きな違いはない. しかし, 固有関数のわずかな違いが流れの物理量に起こる急激な変化の説明に対する重大な役割を果たしている. 固有関数の虚部の流れパターンはこれらの図とほぼ同様なので省略する.

#### 4.4 分岐図

対称定常流 (主流) が不安定になると, 振動流を生じる. 流れの遷移を調べるために, 数値シミュレーションおよび周期解の直接的な数値計算の結果を用いて, 流れの分岐図を描いた. 流れの中の振動の大きさを表す代表的な物理量として, 下流側円柱から約  $6.3d$  後方で  $y$  方向速度  $v_1$  の振動振幅を用いる.

こうして得られた分岐図が図 7(a) – 7(e) である. これらの図では, 流れが振動するときの  $v_1$  の振幅 (最大値, 最小値) が  $Re$  の関数として描かれている. 分岐の形状の変化を詳細に追うために  $\Gamma = 2$  と 4 に加えて,  $\Gamma = 3, 3.1$  および  $3.3$  の間隔比を採用した.  $\Gamma = 2$  (図 7(a)) では, 分岐図はホップ分岐を構成しており, 1 円柱を過ぎる流れの分岐図とよく似ている. これは, 流れが振動しているときに 2 円柱が流れ場の中で単独の障害物と見なされるという 4.2 節の結果を裏づけるものである. 対称定常流 (この図で AC) は  $Re < Re_c = 78.2$  (AB) の範囲で安定,

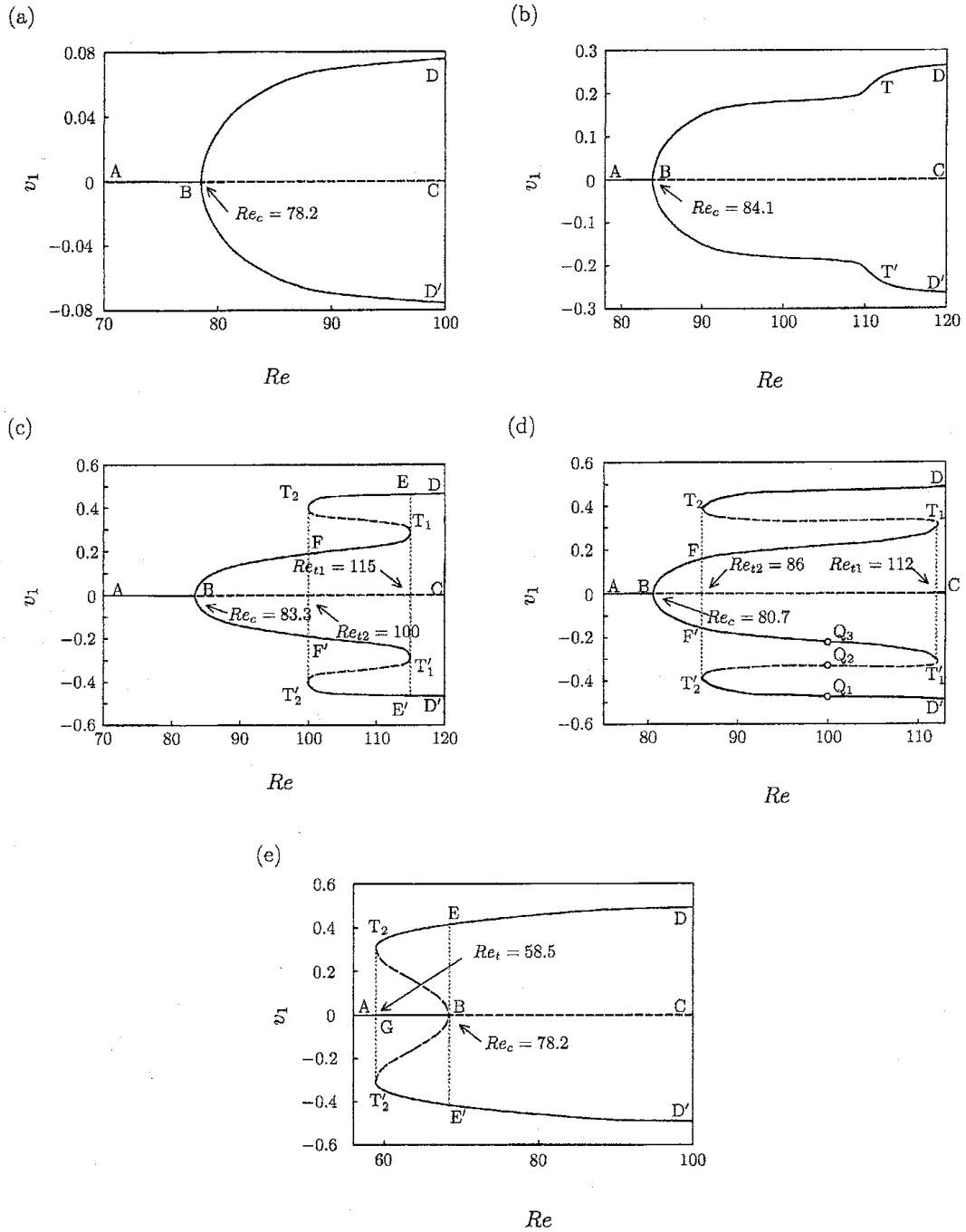


图 7: 分岐图. (a)  $\Gamma = 2.0$ . (b)  $\Gamma = 3.0$ . (c)  $\Gamma = 3.1$ . (d)  $\Gamma = 3.3$ . (e)  $\Gamma = 4.0$ .

$Re > Re_c$  (BC) では不安定である.  $Re = Re_c$  で超臨界ホップ分岐が起こり, 分岐した枝の BD と BD' では振動流での  $v_1$  の最大値と最小値を表している.

間隔比が 3 まで大きくなると分岐図に変曲点 (図 7(b) における T 点) が現れる. この変曲点は  $\Gamma = 3.1$  では 2 つの折りたたみ構造になり, その転換点は図 7(c) の  $T_1$  と  $T_2$  で示されている. このときには, 3 重解が存在する. つまり,  $Re_{t2} \leq Re \leq Re_{t1}$  の範囲において 2 つの安定な解と 1 つの不安定解があり, この結果, ヒステリシスが生じる. すなわち, レイノルズ数が増加するとき, A から D への解の道筋は B,  $T_1$ , E を通る. 一方, レイノルズ数が減少するとき, D から A への道筋は  $T_2$ , F, B を通る. 以上から,  $Re_{t2} \leq Re \leq Re_{t1}$  の範囲において, レイノルズ数が増加する向きに応じて 2 つの異なる解が生じることが明らかにされた.

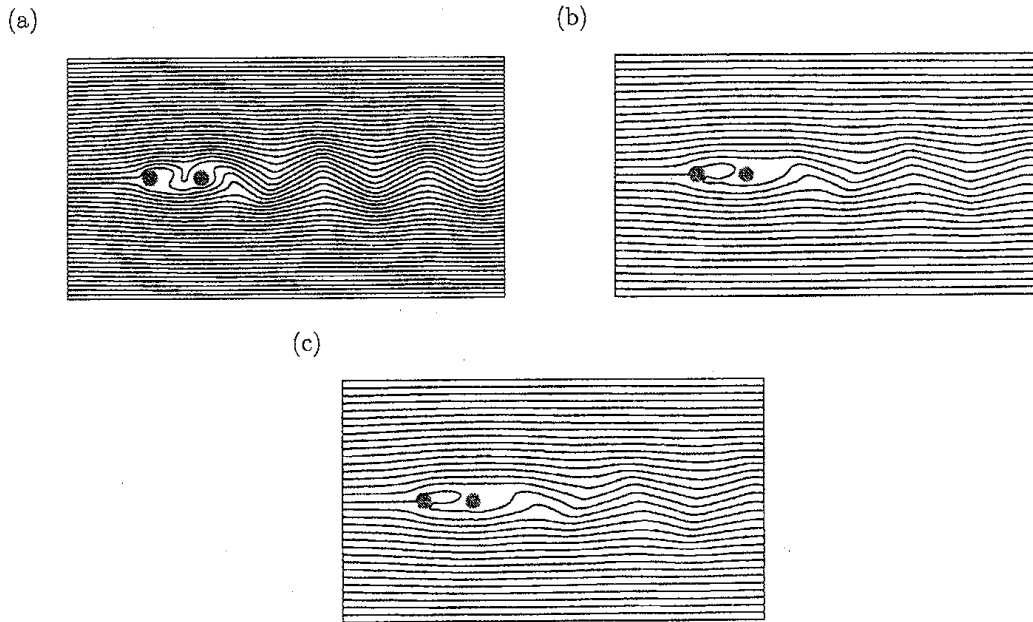


図 8: 多重解.  $Re = 100$ .  $\Gamma = 3.3$ . (a): 定常状態 (図 7(d) の  $Q_1$  点), (b): 不安定状態 ( $Q_2$  点), (c): 定常状態 ( $Q_3$  点).

図 7(d) に示されている  $\Gamma = 3.3$  の分岐図は  $\Gamma = 3.1$  の分岐図と同様の形である. 唯一の違いはホップ分岐と転換点のレイノルズ数  $Re_c$  と  $Re_{t1}$  および  $Re_{t2}$  の値だけである. 間隔比がより大きくなると,  $Re_{t2}$  と  $Re_{t1}$  の値は  $Re_c$  よりも小さくなり転換点  $T_1$  と  $T'_1$  は  $\Gamma = 4.0$  でホップ分岐点 B と合体する. この結果, 亜臨界ホップ分岐が生じる (図 7(e)). この分岐図でもヒステリシスが存在する. レイノルズ数が増加するとき, A から D への解の道筋は B から E へとジャンプし, 他方, レイノルズ数が減少する場合には, D から A へは  $T_2$  から G へとジャンプする.

2 つの安定解と 1 つの不安定解が間隔比  $\Gamma = 3.1$  と  $3.3$  で,  $Re_{t2} \leq Re \leq Re_{t1}$

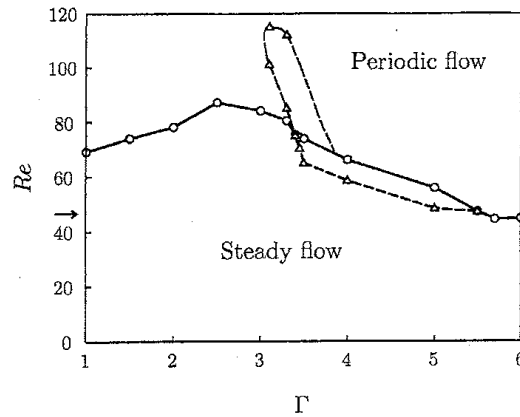


図 9: 遷移図. o: ホップ分岐点 ( $Re_c$ ),  $\Delta$ : 転換点 ( $Re_t$ ).  $\rightarrow$ : 1 円柱の場合のホップ分岐点.

の範囲に存在する.  $\Gamma = 3.3$  での,  $Re = 100$  のときの 3 つの解の流れパターンを図 8 に示す. ただし, 図 8(a) と 8(b) および 8(c) は  $Q_1$  と  $Q_2$  および  $Q_3$  で示される解である. いうまでもなく, 流れパターンだけではこれらの安定性をはっきり見分けることはできない. しかしながら, 図 7(d) より, 図 8(a) と 8(c) に描かれている振動流の振動振幅が最大のもものと最小のものが安定であり, 中程度の振幅 (図 8(b)) をもつ振動流が不安定であることがわかる.

#### 4.5 遷移図

間隔比  $\Gamma = 2$  で超臨界ホップ分岐,  $\Gamma = 4$  で亜臨界ホップ分岐が生じ, この 2 つの間隔比の間では分岐図の形は複雑に変化することが前節で示された. ここでは,  $1 \leq \Gamma \leq 6$  の範囲で分岐図を求めて, 超臨界ホップ分岐点, 亜臨界ホップ分岐点  $Re_c$  と転換点  $Re_{t1}$  と  $Re_{t2}$  を評価した. これを図 9 に示す. この図においてホップ分岐の臨界レイノルズ数は o, 転換点は  $\Delta$  によって示されている. 矢印は 1 円柱を過ぎる流れのホップ分岐による臨界レイノルズ数  $Re_c = 46.7$  を表す. この図より, 分岐は  $\Gamma < 3.4$  あるいは  $\Gamma > 5.5$  で超臨界ホップ分岐,  $3.4 < \Gamma < 5.5$  で亜臨界ホップ分岐である. また, 1 組の転換点が  $\Gamma \sim 3.05$  で現れ, レイノルズ数が小さい側の転換点は  $3.05 < \Gamma < 5.5$  の範囲で存在する. 一方, 大きい側の転換点はホップ分岐が超臨界から亜臨界へと変化する  $\Gamma \sim 3.8$  で消失する.

狭い間隔比  $\Gamma \lesssim 3.1$  では, 分岐図は 1 円柱を過ぎる流れのものと似ている. このことは, 間隔比が  $\Gamma \lesssim 3.1$  の範囲では臨界レイノルズ数  $Re_c$  は  $\Gamma$  の値に依存するが, 流れパターンは 2 円柱が 1 つの結合した物体であるかのように考えられるというこれまでの考察を支持するものである. 一方で,  $\Gamma > 5.5$  の広い間隔比については 2 つの後流はお互いにほとんど独立しており, 臨界レイノルズ数は 1 円柱の値に近づいている. これらの間の間隔比では, 上流側円柱からはがれた流れが

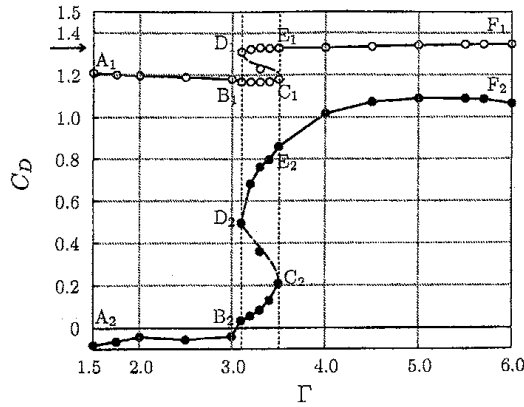


図 10: 平均抗力係数  $C_D$ . ○: 上流側円柱の  $C_D$ . ●: 下流側円柱の  $C_D$ . →: 1 円柱の  $C_D$ .

下流側円柱に対し，非線形効果によって分岐図は転換点で折り返し，結果的に解が多数生じるという複雑な相互作用をしていることになる．

#### 4.6 揚力と抗力

本研究における最大の関心事は抗力係数と揚力係数における不連続な変化である．これらの物理量はこれまで行われてきたほとんどの研究における共通の関心事であり，広範囲にわたって調べられており，これにより， $\Gamma$  が連続して変化するとき， $\Gamma = 3.5 \sim 3.9$  でこれらの物理量の急激な変化が起こることがわかっている．本節では，実験結果と比較するために，1つのレイノルズ数の値について ( $Re = 100$ )，さまざまな値の  $\Gamma$  で，数値シミュレーションと非線形周期解の数値計算によって両方の円柱の抗力係数  $C_D$  と揚力係数  $C_L$  を求めた．

流れによって物体に作用する力は物体周りの圧力分布および流れと物体表面の摩擦によって生じている．ここで，物体に働く力の流れ方向の成分は抗力  $D$ ，垂直な成分を揚力  $L$  である．抗力係数と揚力係数は無次元化し，次の式で求められる．

$$C_D = 2D = -2 \oint p_b \frac{\partial x}{\partial \xi} d\xi + \frac{2}{Re} \oint \omega_b \frac{\partial y}{\partial \xi} d\xi, \quad (22)$$

$$C_L = 2L = -2 \oint p_b \frac{\partial y}{\partial \xi} d\xi + \frac{2}{Re} \oint \omega_b \frac{\partial x}{\partial \xi} d\xi. \quad (23)$$

ただし， $p_b$  と  $\omega_b$  は物体表面の圧力と渦度であり， $\xi$  は物体表面に沿った座標である．

抗力は流れが振動しているときには時間的に変化するので，1周期分の時間で平均化した値を求めた．抗力係数は間隔比が変わると図 10 のように変化する．ここで， $C_{D1}$  (○) と  $C_{D2}$  (●) はそれぞれ上流側円柱と下流側円柱に作用する平均抗力



係数である。一般に1円柱の場合、 $C_D$ の値はおよそ1.2～1.4で、最も信頼できる値は1.33[11]である。これは図10に矢印で示されている。抗力係数 $C_{D1}$ は $\Gamma < 3.5$ でおよそ1.2、 $3.2 \leq \Gamma \leq 6.0$ では1.34である。これらの値は、ほとんど1円柱の場合と同じである。 $C_{D1}$ の値より判断すると、実際には上流側円柱は下流側円柱の影響を受けていないように見えるが、図10を注意深く見ると $C_{D1}$ の線上に $\Gamma \sim 3.1(D_1)$ と3.5( $C_1$ )で2つの転換点が見られる。 $D_1$ と $C_1$ の領域では、 $C_{D1}$ は $\Gamma$ の3重関数である。このことは、この範囲において解が多数存在していることを示している。 $Re = 100$ において、 $C_{D1}$ の測定を実験により行くと、 $C_{D1}$ の値は $\Gamma$ が増加するとき $A_1B_1C_1$ から $E_1F_1$ へと至る。このとき、 $C_1$ から $E_1$ へはジャンプをする。他方、 $\Gamma$ が減少するとき $C_{D1}$ は $F_1C_1D_1$ から $B_1A_1$ へと至る。このときには、 $D_1$ から $B_1$ へとジャンプする。

多重解の存在は下流側円柱の $C_{D2}$ にも現れている。抗力係数 $C_{D2}$ は $C_{D1}$ よりも大きく変化をしている。 $\Gamma \lesssim 3$ で下流側円柱に及ぼされる力は抗力ではなく推進力である。間隔比 $\Gamma$ が増加するにつれて、 $C_{D2}$ の値は $3.1 < \Gamma < 3.5$ で3つの値をもつが、 $\Gamma \gtrsim 4$ で1.1まで増加する。 $\Gamma > 4.0$ では $C_{D2} \sim 1.0 - 1.1$ となりほぼ一定である。このことは、2円柱の後流がお互いにほとんど独立していることの証明である。一方で、 $C_{D2}$ が負になることは、下流側円柱が上流側円柱の後流に完全に包まれ、 $\Gamma \leq 3.0$ では上流側円柱から大きく影響を受けていることを表している。2つの後流の非線形相互作用は $3.1 < \Gamma < 3.5$ で $C_{D2}$ が3つの値をもつことを見ても大変複雑になっている。ここでの結論としてはこれまでの研究結果と矛盾していない。

円柱に作用する揚力 $L$ も臨界レイノルズ数よりも大きいレイノルズ数では周期的に変化する。しかし、計算領域の対称性から判断して、1周期の時間で平均化した値は0となる。よって、ここでは、上流側円柱と下流側円柱における揚力係数 $C_L$ の振動振幅 $C_{L1}(\circ)$ 、 $C_{L2}(\bullet)$ を図11に $1.5 \leq \Gamma \leq 6.0$ の範囲で示す。いうまでもなく、 $C_L$ の両方の線は $3.1 < \Gamma < 3.5$ で多重解の存在を示す3重解となる。 $Re = 100$ での1円柱における揚力の振幅は $C_L \sim 0.08$ と報告されている[12]。これを図11で矢印により示す。 $\Gamma < 2.5$ では上流側円柱、下流側円柱のどちらも $C_{L1} \sim C_{L2} \sim 0.0 - 0.07$ となり1円柱の値に良く似ている。しかしながら、これらの値は $3.1 < \Gamma < 3.5$ で突然に変化し $\Gamma > 4.0$ でかなり大きくなる。

$\Gamma > 4.5$ では $C_{L2}$ の値はおよそ1.6であり、これは下流側円柱に働く平均抗力と同じかそれよりも大きい。下流側円柱については広い間隔比( $\Gamma > 4.0$ )では抗力と同様に大きな揚力も受けているということが結論付けられる。一方で、上流側円柱については下流側円柱よりも大きな抗力を受けるが、揚力( $C_{L1}$ )はそれほど大きくはない。

一般に、1円柱を過ぎる流れのストローハル数 $St$ は $Re = 100$ でおよそ0.164である[11]。これは図12の矢印で示されている。図12からわかるように1円柱の場合とタンデム型2円柱の場合どちらも0.12～0.16でほぼ同じ値である。 $\Gamma < 3.5$ の狭い間隔比の場合はストローハル数は約0.12であり、広い間隔比( $\Gamma > 3.5$ )に

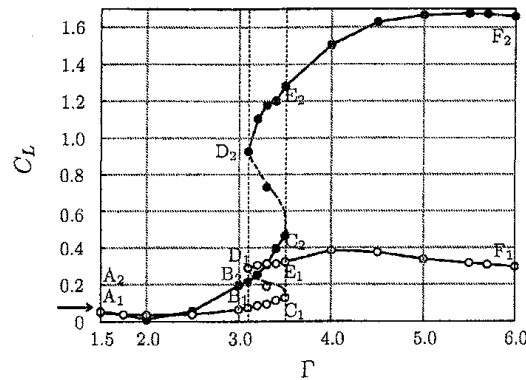


図 11: 揚力係数の振動  $C_L$ .  $Re = 100$ .  $\circ$ :  $C_{L1}$  (上流側円柱).  $\bullet$ :  $C_{L2}$  (下流側円柱).  $\rightarrow$ :  $C_L$  (1円柱).

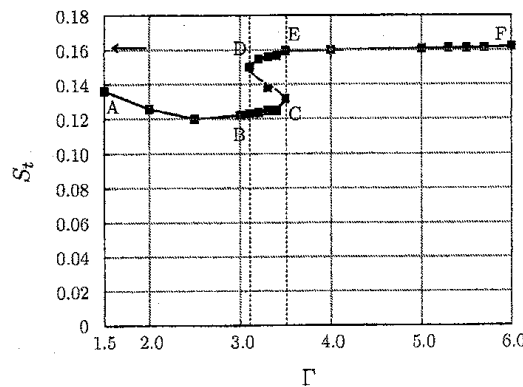


図 12: ストローハル数.  $Re = 100$ .  $\rightarrow$ : 1円柱の  $St$ .

なると 0.16 まで大きくなる.  $3.1 < \Gamma < 3.5$  の範囲では, ストローハル数は急激に変化し, 結果的にこの範囲で多数の解を生じる.

物理量  $C_D$  と  $C_L$  および  $St$  は同様に解の多重性を示している. この解の多重性は図 13 のように代表点  $P_1$  (下流側円柱後方約  $3.6d$ ) での流速  $v_1$  の振動振幅を代表物理量にとることにより明確に描くことができる.  $v_1$  の振動振幅は  $\Gamma < 3.0$  では小さく,  $\Gamma \sim 2.5$  で最小になる. また,  $\Gamma > 4.0$  では大きくなる.

## 5. 結言

本研究では,  $C_D$  と  $C_L$  および  $St$  の物理量に起こる不連続な変化は基礎方程式の解が多数存在することが原因であることを示した. 一方, 実験において, この不連続な変化はもっと高いレイノルズ数  $Re \sim 10^3 - 10^4$  で指摘されてきた. 本研究で得た結論は高いレイノルズ数の流れにおいて直接には適用できないが, 高い

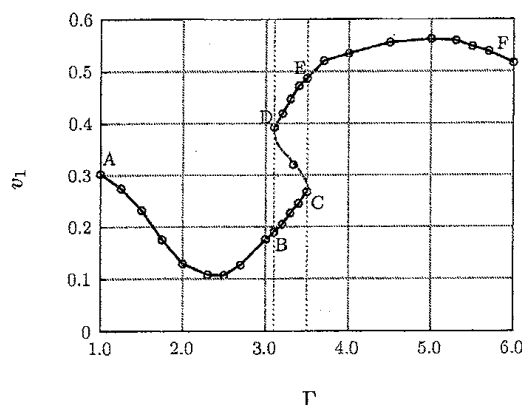


図 13:  $v_1$  の振幅.  $Re = 100$ .

レイノルズ数の流れで小さい規模の渦運動を乱流粘性として取り込むことにより、低いレイノルズ数での分岐構造が高いレイノルズ数でも再現されるという再帰構造をしていることを期待して、ここでの議論が高レイノルズ数においても適用できる可能性を指摘しておく。ただし、このことは今後の研究課題である。

## 謝辞

この研究を進めるにあたり、同志社大学大学院生除補義信君と稲生洋一君の協力を得た。両君に感謝をする。また、この研究は文部科学省および日本学術振興会の科学研究費補助金(基盤研究(C)(2))の支援を受けて行った。

## 参考文献

- [1] I. Peschard and P. Le Gal, "Coupled wakes of cylinder," *Phys. Rev. Lett*, **77**, 3122 (1996).
- [2] M. M. Zdravkovich, "Review of flow interference between two circular cylinders in various arrangement," *J. Fluids Eng.*, **99**, 618 (1977).
- [3] Y. Ohya, A. Okajima and M. Hayashi, "Wake interference and vortex shedding," *Encyclopedia of Fluid Mechanics*. Edited by N. P. Chermisinoff (Gulf Pub., Houston, 1988), vol. 8, pp. 323-389.
- [4] S. Ishigai, E. Nishikawa, K. Nishimura and K. Cho, "Experimental study on structure of gas flow in tube banks with tube axes normal to flow," *Bull. JSME*, **15**, 949 (1972).

- [5] A. Okajima, "Flows around two tandem circular cylinders at very high Reynolds number," *Bull. JSME*, **22**, 504 (1979).
- [6] M. Arie, M. Kiya, M. Moriya and H. Mori, "Pressure fluctuations of the surface of two circular cylinders in tandem arrangement," *J. Fluid Eng.*, **105**, 161 (1983).
- [7] G. Xu and Y. Zhou, "Strouhal numbers in the wake of two inline cylinders," *Exp. Fluids*, **37**, 248 (2004).
- [8] W. Eissler, P. Drtina and A. Frohn, "Cellular automata simulation of flow around chains of cylinders," *Int. J. Num. Meth. Fluids*, **34**, 773 (1992).
- [9] S. Mittal, V. Kumar and A. Raghuvanshi, "Unsteady incompressible flows past two cylinders in tandem and staggered arrangement," *Int. J. Num. Meth. Fluids*, **25**, 1315 (1997).
- [10] J. R. Meneghini, F. Saltara, C. L. R. Siqueira and J. A. Ferrari, Jr., "Numerical simulation of flow interference between two circular cylinders in tandem and side-by-side arrangements," *J. Fluids Struct.*, **15**, 327 (2001).
- [11] B. Sharman, F. S. Lien, L. Davidson and C. Norberg, "Numerical predictions of low Reynolds number flows over two tandem circular cylinders," *Int. J. Num. Meth. Fluids*, **47**, 423 (2005).
- [12] Y. Tanida, A. Okajima and Y. Watanabe, "Stability of circular cylinder oscillating in uniform or in wake," *J. Fluid Mech.*, **61**, 769 (1973).
- [13] K. Ohmi and K. Imaichi, "Vortex wake visualization of two circular cylinders," in *Flow Visualization IV: Proc. 6th Int. Symp.*, Yokohama, Japan, 5-9 October 1992 (Pacific Convention Plaza, Yokohama, 1992), pp. 322-326.
- [14] D. Biermann and W. H. HerrNSTein Jr., "The interference between struts in various combination," *National Advisory Committee for Aeronautics, Tech. Rep.*, **468**, 515 (1933).
- [15] P. Le Gal and M. P. Chauve, "Coupled wakes behind two circular cylinders," *Phys. Rev.*, **A 41**, 4566 (1990).
- [16] T. Igarashi, "Characteristics of the flow around two circular cylinders arranged in tandem (1st report)," *Bull. JSME*, **24**, 323 (1981).
- [17] J. F. Thompson, F. C. Thames and C. W. Mastin, "Automatic numerical generation of body-fitted curvilinear coordinate system for field containing

- any number of arbitrary two-dimensional bodies," *J. Comp. Phys.*, **15**, 299 (1974).
- [18] J. L. Steger and R. L. Sorenson, "Automatic mesh-point clustering near a boundary in grid generation with elliptic partial differential equations," *J. Comp. Phys.*, **33**, 405 (1979).
- [19] C. Mathis, M. Provansal and L. Boyer, "The Benard-von Karman instability: an experimental study near the threshold," *J. Phys. Lett.*, **45**, L-483 (1984).
- [20] C. P. Jackson, "A finite-element study of onset of vortex shedding in flow past variously shaped bodies," *J. Fluid. Mech.*, **182**, 23 (1987).
- [21] S. Taneda; "Experimental investigation of the wake behind cylinders and plates at low Reynolds number," *J. Phys. Soc. Japan*, **11**, 302 (1956).